مشتقات جزیی: اگر از تابع چندمتغیره نسبت به یکی از متغیرهای مستقل مشتق بگیریم (سایر متغیرها را ثابت فرض کنیم) به آن مشتق جزیی تابع می‌گوییم.

اگر $z=f(x,y)$ (f تابعی دو متغیره) در اینصورت متغیرهای مستقل عبارتند از x و y بنابراین از f یا z می‌توان یکبار نسبت به x (با فرض ثابت در نظر گرفتن y) و همچنین نسبت به y (با فرض ثابت در نظر گرفتن x) مشتق گرفت.

توجه - مشتق f یا z نسبت به x را با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial z}{\partial x}$، f_x، z_x، f'_x، z'_x، $D_1 f$، $D_1 z$ یا $D_x f$، $D_x z$ نمایش می‌دهند.

به طور مشابه برای نمایش مشتق f یا z نسبت به y از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial f}{\partial y},\ f_y,\ f'_y,\ D_2 f,\ D_y f$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ z_y,\ z'_y,\ D_2 z,\ D_y z$$

توجه بسیار مهم - هرگاه در محاسبه‌ی مشتق جزئی مشکلی به وجود آید (اغلب در نقاطی که ضابطه‌ی تابع عوض می‌شود) از تعریف مشتق جزئی به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ یا } \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ یا } \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

مثال - فرض کنید $z=2x^2-xy+y^2$ در اینصورت مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $A(2,3)$ چقدر است؟

حل) برای محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، y را ثابت در نظر می‌گیریم و از تابع نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x-y \xrightarrow{A(2,3)} \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,3)} = 4\times 2-3=5$$

به همین ترتیب برای محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial y}$، x را ثابت در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(2,3)} = -2 + 2 \times 3 = 4$$

مثال - برای تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مشتقات جزئی (پاره‌ای) را محاسبه کنید.

حل - در تمام نقاط به جز مبدأ، مشتقات جزئی را می‌توان به طور عادی محاسبه کرد، یعنی:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

ولی برای محاسبه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ با توجه به ضابطه‌ی f باید از تعریف مشتق جزئی استفاده کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{h}=\pm\infty$$

درنتیجه $\frac{\partial f}{\partial x}$ درمبدأ موجود و برابر صفر است و $\frac{\partial f}{\partial y}$ درمبدأ وجود ندارد.

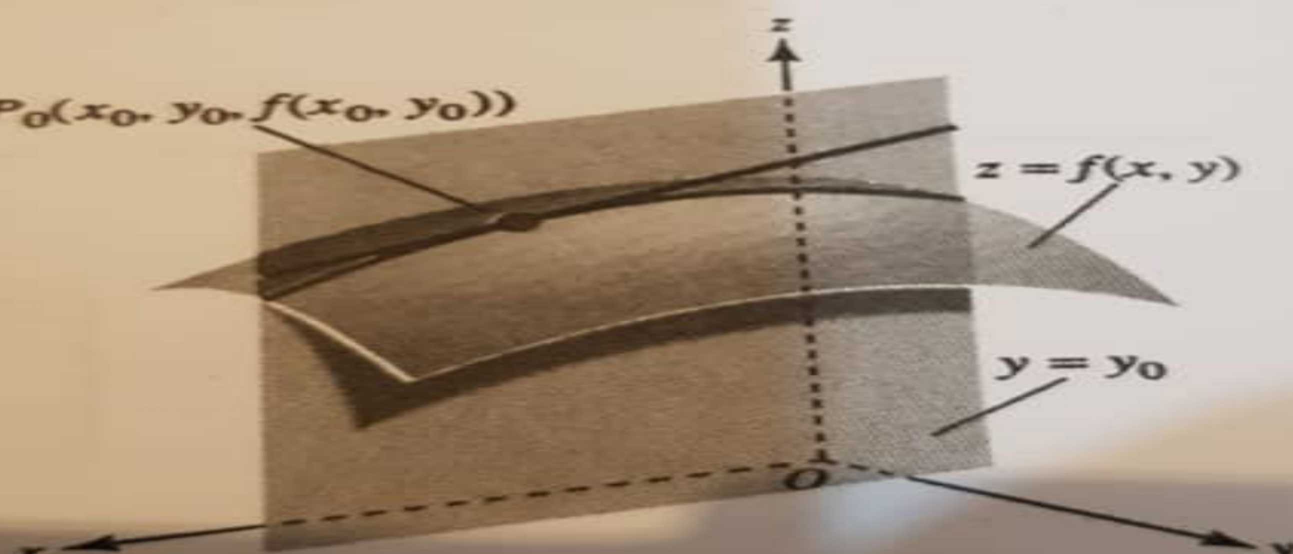
توجه کنید تابع f در نقطه ی $(0,0)$ ناپیوسته است (حد ندارد چون حدود دیگر نابرابر می‌شوند)
ولی $\frac{\partial f}{\partial x}$ وجود دارد.

به طور کلی ارتباطی بین وجود مشتق های جزئی و پیوستگی یک تابع دومتغیره وجود ندارد.

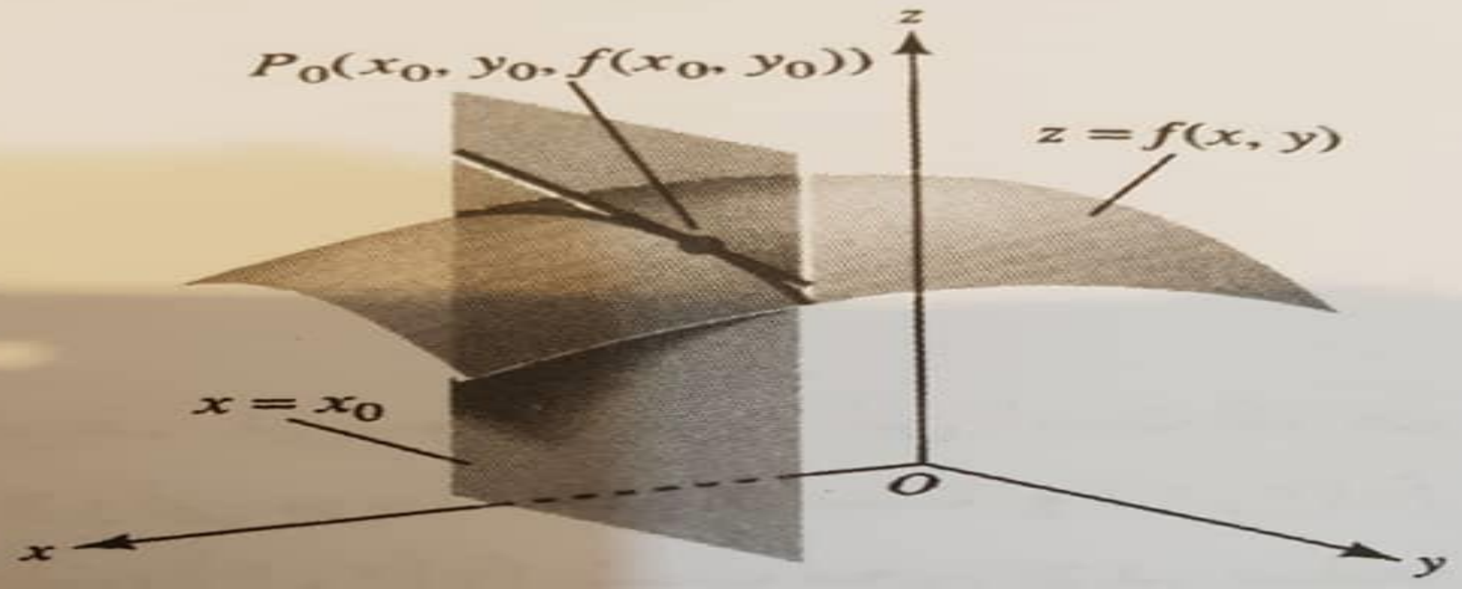
ولی اگر $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در همسایگی نقطه ی (a,b) موجود بوده و پیوسته باشند آنگاه f در نقطه ی (a,b) پیوسته است.

تعبیر هندسی مشتق جزیی $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$: اگر نمودار $z=f(x,y)$ را با صفحه‌ی $y=y_0$ برخورد دهیم یک منحنی حاصل می‌شود که شیب خط مماس بر این منحنی در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) برابر است با $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

به همین صورت نیز می‌توان گفت شیب خط مماس بر منحنی حاصل از تلاقی نمودار $z=f(x,y)$ با صفحه‌ی $x=x_0$ در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) برابر است با $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.



شکل ۱



شکل ۲

مثال ۳. مطلوب است شیب خط مماس بر خمِ حاصل از تقاطع رویهٔ

$$z = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۴ - x^{۲} - ۲y^{۲}}$$

با صفحهٔ $y = ۲$ در نقطهٔ $(۲, ۲, \sqrt{۳})$.

مشتق جزئی مرتبه‌های بالاتر

مشتق‌های جزئی مرتبه دوم از تابع $z=f(x,y)$ برابر است با مشتق‌های جزئی از مشتق‌های جزئی مرتبه اول تابع z :

(۱) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\overset{\text{نماد}}{=\!=}f''_{xx}=z''_{xx}$$

یا با نماد $f_{xx}\,,\ z_{xx}\,,\ f_{11}\,,\ z_{11}$ نمایش می‌دهند

(۲) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\overset{\text{نمادنویسی}}{=\!=}f''_{yy}\ \text{یا}\ z''_{yy}\ \text{یا}\ f_{yy}\ \text{یا}\ z_{yy}\ \text{یا}\ f_{22}\ \text{یا}\ z_{22}$$

(۳) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\overset{\text{نمادنویسی}}{=\!=}f''_{yx}\ \text{یا}\ z''_{yx}\ \text{یا}\ f_{yx}\ \text{یا}\ z_{yx}\ \text{یا}\ f_{21}\ \text{یا}\ z_{21}$$

(۴) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\overset{\text{نمادنویسی}}{=\!=}f''_{xy}\ \text{یا}\ z''_{xy}\ \text{یا}\ f_{xy}\ \text{یا}\ z_{xy}\ \text{یا}\ f_{12}\ \text{یا}\ z_{12}$$

تذکر- وقتی تمام مشتق های جزئی یک تابع، پیوسته باشند (یعنی f_x، f_y، f_{xy} و f_{yx}) نتیجه‌ی نهایی مشتق، به ترتیب مشتق گیری بستگی ندارد یعنی $f_{xy}=f_{yx}$.

به عبارت دیگر فرقی نمی کند اول نسبت به x مشتق بگیریم بعد نسبت به y و یا بالعکس.

۴/

مثال- مشتق های جزیی مرتبه دوم تابع $Z = \operatorname{Arc}\tan\frac{x}{y}$ را بدست آورید.

حل-

$$y = \operatorname{Arc}\tan u \overset{\text{فرمول}}{\Longrightarrow} y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1/y}{1+x^2/y^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-x/y^2}{1+x^2/y^2} = \dfrac{-x}{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1(x^2+y^2)-2x(x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

اگر بخواهیم با ترتیب دیگری، مشتق جزیی اخیر را حساب کنیم داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1(x^2+y^2)-2y(y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ملاحظه می شود که $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

دیفرانسیل کامل

فرض کنید تابع $z=f(x,y)$ دارای مشتقات جزیی مرتبه ی اول باشد در اینصورت دیفرانسیل (دیفرانسیل کامل) z برابر است با

$$d_z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

اگر f تابعی سه متغیره باشد: $(f(x,y,z))$

$$d_f=\frac{\partial f}{\partial x}d_x+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}d_z$$

مثال

$f(x,y)=3x^2-xy \Rightarrow$ دیفرانسیل f $\; d_f=(6x-y)\,d_x+(-x)\,dy$

$f(x,y,z)=x^2\,Ln(y-z) \Rightarrow$ دیفرانسیل f $\; d_f=2x\,Ln(y-z)\,dx+\frac{x^2}{y-z}dy-\frac{x^2}{y-z}d_z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\,Ln(y-z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2\times\frac{1}{y-z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=x^2\times\frac{-1}{y-z}$$

نکته - درصورت وجود مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم، دیفرانسیل مرتبه دوم تابع z به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2$$

مثال - دیفرانسیل کامل مرتبه دوم تابع $u = 2x^2 - 3xy - y^2$ را بیابید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 3y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-3x - 2y\right) = -3$$

طبق فرمول بالا $\Rightarrow d^2u = 4dx^2 - 6dx\,dy - 2dy^2$

مشتق زنجیره‌ای:

① اگر z تابعی دو متغیره باشد یعنی $z=f(x,y)$ که x و y مشتق‌پذیر با متغیر t باشند در این صورت:

$$z \begin{cases} x - t \\ y - t \end{cases} \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{z}{x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{z}{y} \times \frac{dy}{dt}$$

مثال - فرض کنید $z=x^2e^y$ ، $x=\sin t$ و $y=t^3$ ، در این صورت $\frac{dz}{dt}$ را بیابید.

فرمول $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$= (2xe^y)\cos t + (x^2e^y)\,3t^2$$

$$= 2\sin t\, e^{t^3} \cos t + 3\sin^2 t\, e^{t^3}\, t^2$$

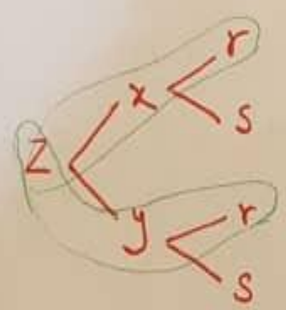
۶/

تمرین - در حالت های زیر، $\frac{dz}{dt}$ را با استفاده از قاعده ی زنجیره ای پیدا کنید.

الف) $z=2x^2-4y^3 \quad , \quad x=\sqrt{t} \quad , \quad y=e^{3t^2}$

ب) $z=\sqrt{4x-y} \quad , \quad x=\ln t \quad , \quad y=2-t^2$

(۲) هرگاه داشته باشیم $z=f(x,y)$ که در آن $x=g(r,s)$ و $y=h(r,s)$ در اینصورت داریم:



① $$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

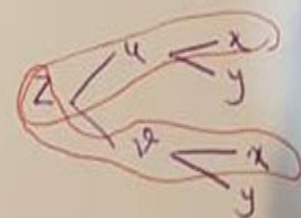
② $$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال - اگر $z=x\ln y$ که در آن $x=r^2+s^2$ و $y=r^2-s^2$ مطلوبست محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial s}$.

$$\frac{\partial z}{\partial r}=(\ln y)(2r)+\left(\frac{x}{y}\right)(2r)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=(\ln y)(2s)+\left(\frac{x}{y}\right)(-2s)$$

مثال - اگر $z=u^2+v^2+uv$ ، $u=x^2-y^2$ و $v=xy$ دراینصورت مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ به ازای $x=3$ و $y=2$ چقدر است؟



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=(2u+v)(2x)+(2v+u)(y)$$

$$=(2\times 5+6)(2\times 3)+(2\times 6+5)(2)$$

$$=130$$

وقتی $x=3$ ، $y=2$ داریم $\begin{cases} u=9-4=5 \\ v=2\times 3=6 \end{cases}$

تمرین - اگر $z = u^2 + v^2$ و $u = e^{x^2+y^2}$ و $v = \frac{x}{y}$ درانصورت $z'_x(1,1)$ را بیابید: