بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه درس مبانی منطق و نظریه مجموعه ها

پنجمین جلسه مجازی – پردیس فاطمه زهرا (س) ساری

مدرس : خانم میرزاپور

مطالب :

1 – ضرب اعداد اصلی

2 – توان اعداد اصلی

۵. ضرب اعداد اصلی

در این قسمت، ضرب اعداد اصلی را طوری تعریف خواهیم کرد که نتیجه در مورد اعداد اصلی متناهی با ضرب معمولی اعداد صحیح نامنفی مطابقت داشته باشد.

تذکر- اگر A ، B ، A' و B' چهار مجموعه باشند که $\operatorname{card} A = \operatorname{card} A'$ و $\operatorname{card} B = \operatorname{card} B'$ در اینصورت $\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A' \times B')$

بنا به فرض

برهان - از قبل می دانیم که اگر $A \sim A'$ و $B \sim B'$ آنگاه $A \times B \sim A' \times B'$. از طرفی
چون $\operatorname{card} A = \operatorname{card} A'$ پس $A \sim A'$ ، و چون $\operatorname{card} B = \operatorname{card} B'$ پس $B \sim B'$ ، لذا
$A \times B \sim A' \times B'$ درنتیجه $\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A' \times B')$.

$A\times B \sim A'\times B$ درنتیجه $\operatorname{card}(A\times B)=\operatorname{card}(A'\times B)$.

تعریف ۳ - برای هر دو عدد اصلی a و b، حاصلضرب اصلیِ ab، عددِ اصلیِ حاصلضرب دکارتی $A\times B$ تعریف می‌شود که در آن $\operatorname{card} A=a$ و $\operatorname{card} B=b$.

$$\boxed{\operatorname{card} A\cdot \operatorname{card} B = ab = \operatorname{card}(A\times B)}$$

توجه - با توجه به تذکر فوق، این تعریف بدون اشکال است؛ یعنی حاصلضرب دو عدد اصلی a و b به مجموعه های انتخاب شده‌ی A و B بستگی ندارد؛ به عبارت دیگر تعریف فوق، خوش‌تعریف است.

قضیه ی ۵ — فرض کنید x، y و z سه عدد اصلی دلخواه باشند. در اینصورت

الف) $xy = yx$ (جابجایی)

ب) $(xy)z = x(yz)$ (شرکت‌پذیری)

ج) $x(y+z) = xy + xz$ (پخش‌پذیری)

حل) چون x، y و z سه عدد اصلی دلخواه هستند بنابراین سه مجموعه ی A، B و C وجود دارند به طوری که

$$\operatorname{card} A = x \,,\quad \operatorname{card} B = y \,,\quad \operatorname{card} C = z$$

الف) $xy = \operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} B \overset{\text{تعریف}}{=\!=} \operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(B \times A) = \operatorname{card} B \cdot \operatorname{card} A = yx$

ب) $(xy)z = \operatorname{card}(A \times B) \cdot \operatorname{card} C \overset{\text{تعریف}}{=\!=} \operatorname{card}\left[(A \times B) \times C\right] = \operatorname{card}\left[A \times (B \times C)\right] = \operatorname{card} A \cdot \operatorname{card}(B \times C) = x(yz)$

ج) $x(y+z) = \text{card}\, A \cdot (\text{card}\,(B \cup C)) \overset{\text{تعریف}}{=\!=} \text{card}\left[A \times (B \cup C)\right] = \text{card}\left[(A \times B) \cup (A \times C)\right]$

$= \text{card}\,(A \times B) + \text{card}\,(A \times C) = xy + xz$

مثال- اگر $\alpha = ۲$ و $\beta = ۶$ آنگاه

$۲ \times ۶ = \text{card}\,(A_۲ \times A_۶) = \text{card}\left\{(۱,۳)(۱,۴)(۱,۵), \dots, (۲,۸)\right\} = ۱۲$

$$\begin{cases} A_۲ = \{۱,۲\} \\ A_۶ = \{۳,۴,۵,۶,۷,۸\} \end{cases}$$

مثال ۵- فرض کنیم x یک عدد اصلی دلخواه باشد. مقادیر زیر را به دست آورید.

مثال ۵ - فرض کنیم x یک عدد اصلی دلخواه باشد. مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $1x$ ب) $0x$ ج) $\aleph_0 . \aleph_0$

حل) چون x یک عدد اصلی است پس $\exists \overset{\text{مجموعه}}{A} \; ; \; \operatorname{card} A = x$

الف) $1x = \operatorname{card}(\{1\} \times A) \xlongequal[\{1\}\times A \sim A]{} \operatorname{card} A = x$

دلخواه مثلاً b

ب) $\xrightarrow[\operatorname{card}\phi = 0]{\operatorname{card} A = x} \; 0x = \operatorname{card}\phi . \operatorname{card} A = \operatorname{card}(\phi \times A) = \operatorname{card}\phi = 0$

ج) $\aleph_0 . \aleph_0 = \operatorname{card}\mathbb{N} . \operatorname{card}\mathbb{N} = \operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \xlongequal[\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}]{\text{قضیه ۱۰ فصل ۵}} \operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0$

۶. توان اعداد اصلی

تعریف ـ اگر A و B دو مجموعه باشند مجموعه‌ی تمام توابع از A به B را با نماد B^A نشان می‌دهیم.

$$B^A = \{ f \mid f : A \xrightarrow{\text{تابع}} B \}$$

قضیه‌ی ۶ ـ اگر A، A'، B و B' چهار مجموعه باشند به طوری که $A \sim A'$ و $B \sim B'$ آنگاه $B^A \sim B^{A'}$.

برهان:

فرض $\begin{cases} A \sim A' \longrightarrow \exists f: A \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{یک‌به‌یک}} A' \\ B \sim B' \longrightarrow \exists g: B \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{یک‌به‌یک}} B' \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K"'] & A' \arrow[d, "\ell"] \\ B \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

ψ φ

حال تابع $\psi: B^A \longrightarrow B'^{A'}$ را به‌صورت $\psi(K) \overset{①}{=} g \circ \underline{\underline{k}} \circ f^{-1}$ تعریف می‌کنیم.

برای اثبات یک‌به‌یک بودن و پوشایی تابع ψ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

تابع $\varphi: B'^{A'} \longrightarrow B^A$ را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم $\varphi(\ell) \overset{②}{=} g^{-1} \circ \underline{\underline{\ell}} \circ f$

نشان می‌دهیم $\varphi \circ \psi = I$ و $\psi \circ \varphi = I$ بدین ترتیب ثابت شده است که ψ یک‌به‌یک و پوشاست و لذا $B^A \sim B'^{A'}$.

$$\forall K \in B^A \rightsquigarrow (\varphi \circ \psi)(K) = \varphi(\psi(K)) \overset{①}{=} \varphi(\underline{g \circ K \circ f^{-1}}) \overset{②}{=} g^{-1} \circ \underline{g \circ K \circ f^{-1}} \circ f = K$$

$$\Rightarrow \varphi \circ \psi = I_{B^A}$$

$$\forall \ell \in B'^{A'} \longrightarrow (\psi \circ \varphi)(\ell) = \psi(\varphi(\ell)) \overset{②}{=} \psi(\underline{g^{-1} \circ \ell \circ f}) \overset{①}{=} g \circ \underline{g^{-1} \circ \ell \circ f} \circ f^{-1} = \ell$$

$$\Rightarrow \psi \circ \varphi = I_{B'^{A'}}$$

تعریف ۴- اگر a و b دو عدد اصلی باشند با این شرط که $a \neq 0$ و A و B مجموعه‌هایی با اعداد اصلی $\text{card}\, A = a$ و $\text{card}\, B = b$. b^a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b^a = \text{card}\,(B^A)$$

مثال ۷- فرض کنید A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. دراینصورت $\text{card}\, \mathcal{P}(A) = 2^{\text{card}\, A}$

حل- مجموعه‌ی $B=\{0,1\}$ دارای کاردینالی برابر ۲ می‌باشد. حال تابع $\psi : B^A \to \mathcal{P}(A)$ را به صورت $\psi(f) = \{x \in A \,;\, f(x)=1\}$ درنظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم ψ تابعی یک به یک و پوشاست ولذا

$$B^A \underset{\text{هم‌توان}}{\sim} \mathcal{P}(A) \Rightarrow 2^{\text{card}\, A} = \text{card}\, \mathcal{P}(A)$$

اثبات یک به یک بودن ψ :

فرض می‌کنیم $\psi(f_1)=\psi(f_2) \longrightarrow \{x\in A \mid f_1(x)=1\}=\{x\in A \mid f_2(x)=1\}$

$\xrightarrow{\text{متمم}} \{x\in A \mid f_1(x)=0\}=\{x\in A \mid f_2(x)=0\}$ $\xrightarrow[\text{دارای ضابطه‌ی برابر هستند}]{\text{پس دو تابع روی دامنه‌ی برابر}}$

$$\forall x\in A : f_1(x)=f_2(x) \Rightarrow f_1=f_2$$

اثبات پوشایی ψ :

باید نشان دهیم برای هر $C\in P(A)$ ، یک $f\in B^A$ وجود دارد به طوری که $\psi(f)=C$.

فرض می‌کنیم $C\in P(A)$ داده شده باشد. تابع $f:A\to B$ را به صورت χ (خی - کای) تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in C\\ 0 & x\notin C\end{cases} \qquad \left(\text{یا } \chi_C(x)=\begin{cases}1 & x\in C\\ 0 & x\notin C\end{cases}\right)$$

$\longrightarrow \psi(f)=\{x\in A ; f(x)=1\}=C \longrightarrow$ دراینصورت ψ پوشاست

تعریف ـ (تحدید یک تابع) اگر $f: A \to B$ یک تابع و $A_1 \subsetneqq A$ باشد تابع $g: A_1 \to B$

که با ضابطه‌ی $g(a_1) = f(a_1)$: $\forall a_1 \in A_1$ تعریف شده است را تحدید تابع f به A_1 می‌نامیم

و به‌صورت $f|_{A_1}$ نشان می‌دهیم.

قضیه‌ی ۷ - برای هر سه عدد اصلی a ، x و y داریم $a^x a^y = a^{x+y}$.

برهان - مجموعه‌های A ، X و Y موجودند به طوری که $\operatorname{card} A = a$ ، $\operatorname{card} X = x$ و $\operatorname{card} Y = y$ و $X \cap Y = \phi$.
(طبق اصل ۱) در این صورت چون $X \cap Y = \phi$ پس $x+y = \operatorname{card}(X \cup Y)$.

حال تابع $\psi : A^X . A^Y \to A^{X \cup Y}$ را به صورت $\psi(f,g) = f \cup g$ تعریف می‌کنیم. برای اثبات یک به یک و پوشا بودن ψ تابع $\varphi : A^{X \cup Y} \to A^X \times A^Y$ به صورت $\varphi(f) = (\underbrace{f|_X}_{\text{تحدید}}, \underbrace{f|_Y}_{\text{تحدید}})$ تعریف می‌کنیم. در اینصورت

$$\forall f \in A^{X \cup Y} \to (\psi \circ \varphi)(f) = \psi(\varphi(f)) \overset{\text{طبق تعریف تابع}}{\underset{\varphi}{=\!=}} \psi(f|_X, f|_Y) = f|_X \cup f|_Y = f$$

$$\Rightarrow \psi \circ \varphi = I \quad (1)$$

$$\forall (f,g) \in A^X . A^Y \to (\varphi \circ \psi)(f,g) = \varphi(\psi(f,g)) \overset{\text{طبق تعریف } \psi}{=} \varphi(f \cup g) \overset{\text{طبق تعریف تابع}}{\underset{\varphi}{=\!=}} (f \cup g|_X, f \cup g|_Y) = (f,g)$$

$$\Rightarrow \varphi \circ \psi = I \quad (2)$$

از ① و ② یک به یک و پوشا بودن تابع ψ بدست می آید و در نتیجه

$$a^x a^y = \text{card}\,(A^X \times A^Y) = \text{card}\,(A^{X \cup Y}) = a^{x+y}$$

قضیه ی ۸ - گیریم x، y و z اعداد اصلی هستند. آنگاه $(z^x)^y = z^{xy}$

برهان - فرض می کنیم X، Y و Z مجموعه هایی باشند که اعداد اصلی آنها به ترتیب x، y و z هستند. طبق تعریف ۴ کافی است نشان دهیم $(Z^X)^Y \underset{\text{هم‌توان}}{\sim} Z^{X \times Y}$

ابتدا فرض می کنیم $f \in Z^{X \times Y}$ در اینصورت می توان از تابع f دو تابع زیر را نتیجه گرفت:

تابع اول وقتی است که مؤلفه ی اول متغیر و مؤلفه ی دوم ثابت باشد و تابع دوم وقتی است که مؤلفه ی دوم متغیر و مؤلفه ی اول ثابت باشد. بنابراین با توجه به تابع f: $f : X \times Y \to Z$

ابتدا فرض می کنیم $f \in Z^{X\times Y}$ در اینصورت می توان از تابع f دو تابع زیر را نتیجه گرفت :

تابع اول وقتی است که مؤلفه ی اول متغیر و مؤلفه ی دوم ثابت باشد و تابع دوم وقتی است که مؤلفه ی دوم متغیر و مؤلفه ی اول ثابت باشد. بنابراین با توجه به تابع f :

$$f: X\times Y \longrightarrow Z$$
$$\underbrace{(x,y)}_{\text{زوج مرتب}} \longrightarrow \underbrace{f(x,y)}_{\text{مقدار (نقطه)}}$$

حال اگر y ثابت باشد، تابع اول به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_y : X \longrightarrow Z$$
$$f_y(x) = f(\underbrace{x}_{\text{متغیر}}, \overset{\text{ثابت}}{y})$$

و اگر x ثابت باشد، تابع دوم به صورت زیر تعریف می گردد:

$$f^x : Y \longrightarrow Z$$
$$f^x(y) = f(\overset{\text{ثابت}}{x}, \overset{\text{متغیر}}{y})$$

بنابراین به ازای تابع f، دو تابع f^x و f_y به دست می آید. حال تابع $e_f : Y \to Z^X$ را به صورت $e_f(y) = f_y$ تعریف می کنیم. $(e_f(y) \in Z^X \text{ ، } f_y : X \to Z)$

در نتیجه تابع $\varphi : Z^{X\times Y} \longrightarrow (Z^X)^Y$ که با ضابطه ی $\varphi(f) = e_f$ تعریف می شود تابعی است یک به یک و پوشا.