آموزش مجازی ریاضی عمومی 2

استاد سرکار خانم میرزاپور

پردیس فاطه الزهرا(س) ساری

جلسه پنجم

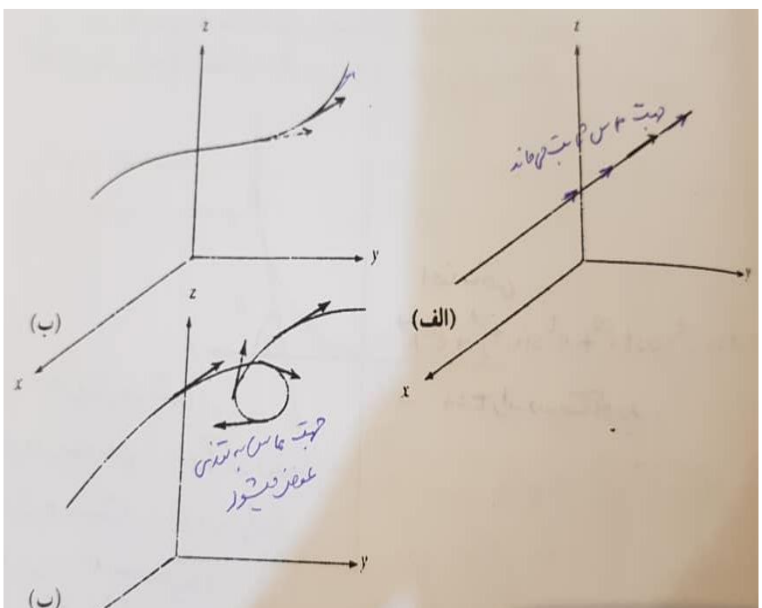
۱

انحنا (خمیدگی) میزان تغییرات بردار یکه‌ی مماس نسبت به طول قوس خم را انحنا گوییم.

در حقیقت انحنا معیاری است که مقدار انحراف خم c، در یک نقطه را از خط مماس بیان می‌کند.

اگر با حرکت در مسیر خم، تغییرات بردار یکه‌ی مماس، ساعتگرد باشد انحنا مثبت است و اگر تغییرات بردار یکه‌ی مماس در جهت پادساعتگرد باشد، علامت انحنا منفی خواهد بود و نیز اگر حرکت روی خط مستقیم باشد، انحنا صفر است.

- به معکوس انحنا، شعاع انحنا می‌گوییم.



شکل ۱.۴.۶

فرمول های انحنا

۱- برای منحنی $y=f(x)$ ، انحنا در هر نقطه از فرمول $k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ بدست می آید.

مثال - انحنای تابع با ضابطه ی $y=x^2$ را بیابید.

حل) $y=x^2 \longrightarrow y'=2x \longrightarrow y''=2x$

انحنا $K(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{(1+4x)^{3/2}}$

مثال - انحنای $y=\ln x$ را در نقطه ی $(1,0)$ بیابید.

حل) $y=\ln x \longrightarrow y'=\frac{1}{x} \longrightarrow y''=\frac{-1}{x^2}$

در نقطه ی $(1,0)$

$y'(1)=1$ $\quad$ $y''(1)=-1$

انحنا $K(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-1|}{(1+1)^{3/2}}=\frac{1}{2^{3/2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

مثال - اگر معادله ی خم c به صورت $y=\frac{1}{x}$ باشد، شعاع انحنا (شعاع خمیدگی) c را در نقطه ی $(1,1)$ تعیین کنید.

حل) $y=1/x \longrightarrow y'=-1/x^2 \longrightarrow y''=\frac{2}{x^3}$

در نقطه ی $(1,1)$

$y'(1)=-1$ $\quad$ $y''(1)=2$

انحنا $K(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{(1+1)^{3/2}}=\frac{2}{2^{3/2}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}$

انحنا $K(x)=1/\sqrt{2}$

$\Downarrow$

شعاع انحنا $=\rho=\frac{1}{\text{انحنا}}=\sqrt{2}$

۲- برای منحنی پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ که در R^2 داده شده باشد (یا معادله‌ی مکان آن بصورت $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ داده شود) انحنا از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\begin{matrix} x' & & y' \\ & \times & \\ x'' & & y'' \end{matrix}$$

مثال - برای خم به معادله‌ی برداری $\vec{R}(t) = 2t\vec{i} + (t^2-1)\vec{j}$ ، خمیدگی و شعاع خمیدگی را در $t=1$ تعیین کنید.

حل) $x(t) = 2t$

$y(t) = t^2 - 1$

$$\begin{matrix} x' & & y' \\ & \times & \\ x'' & & y'' \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 2 & & 2t \\ & \times & \\ 0 & & 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|4|}{(4 + (2t)^2)^{3/2}} = \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} \xrightarrow{t=1} \underset{\text{انحنا}}{k(1)} = \frac{4}{8^{3/2}} = \frac{4}{(\underbrace{\sqrt{8}}_{2\sqrt{2}})^3} = \frac{4}{16\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow k(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \underset{\text{شعاع انحنا (خمیدگی)}}{\rho(1)} = \frac{1}{k(1)} = 4\sqrt{2}$$

تمرین – خمیدگی منحنی
$$\begin{cases} x(t)=2\cos^3 t \\ y(t)=2\sin^3 t \end{cases}$$
در $t=\pi/4$ را بیابید. (جواب $\frac{1}{3}$)

تمرین – اگر $\vec{R}(t)=(\sin t - t\cos t)\vec{i}+(\cos t + t\sin t)\vec{j}$ ، انحنای منحنی در نقطه‌ی نظیر $t=\pi/3$ چیست؟ (جواب $\frac{3}{\pi}$)

۳– برای منحنی تعریف شده که بردار مکان $\vec{R}(t)$ در فضا توصیف شده است انحنا در هر نقطه از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$K(t)=\frac{|\vec{R}'(t)\overset{\text{خارجی}}{\times}\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}\overset{\text{یا}}{=}\frac{|\overset{\text{سرعت}}{V}\times\overset{\text{شتاب}}{A}|}{\underset{\text{سرعت}}{|V|^3}}$$

مثال – انحنای منحنی $\vec{R}(t)=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\sin t\,\vec{j}+e^t\vec{k}$ در $t=0$ را بدست آورید.

حل) $\vec{R}(t)=(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)\xrightarrow{\text{مشتق}}\vec{V}(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t,\ e^t\sin t+e^t\cos t,\ e^t)$

$$\vec{V}(0)=(1,1,1)$$

$$V'(t)=\underset{\text{شتاب}}{A(t)}=(-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t,\ e^t)\to A(0)=(0,2,1)$$

$$V\times A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-1,2)\to \underset{\text{انحنا}}{K(0)}=\frac{|V\times A|}{|V|^3}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

تمرین- انحنای منحنی تعریف شده به صورت

$$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \\ z(t)=t \end{cases}$$

را در هر نقطه‌ی دلخواه t بدست آورید. (جواب $\frac{1}{2}$)

تمرین- خمیدگی منحنی داده شده توسط $\vec{R}(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\,t\,\vec{k}$ را تعیین کنید.

شتاب مماسی و شتاب قائم

بردار شتاب را علاوه بر رابطه‌ی $\vec{A}(t)=\vec{r}''(t)$ می‌توان برحسب بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ به صورت $\vec{A}(t)=A_T\vec{T}+A_N\vec{N}$ نیز نوشت که A_T را مؤلفه‌ی مماسی شتاب و A_N را مؤلفه‌ی قائم شتاب گوییم و از رابطه‌های زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} A_T(t)=\dfrac{d}{dt}\,|\vec{v}(t)| \\ \\ A_N(t)=\sqrt{|\vec{A}|^2-A_T^2} \end{cases}$$

مثال - ذره ای در طول خم به معادله ی برداری $\vec{R}(t)=t\vec{i}+e^{t}\vec{j}+t\vec{k}$ حرکت می کند. مؤلفه های مماسی و قائم بردار شتاب را بیابید.

حل) $v(t)=\vec{R}'(t)=\vec{i}+e^{t}\vec{j}+\vec{k} \Rightarrow \underbrace{|v(t)|}_{\text{اندازه}}=\sqrt{1^2+(e^t)^2+1^2}=\sqrt{2+e^{2t}}$

$A_T(t)=\frac{d}{dt}|v(t)|=\frac{d}{dt}\sqrt{2+e^{2t}} \xrightarrow{(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}} \frac{\cancel{2}e^{2t}}{\cancel{2}\sqrt{2+e^{2t}}} \Rightarrow A_T(t)=\frac{e^{2t}}{\sqrt{2+e^{2t}}}$

$A_N(t)\overset{\text{فرمول}}{=}\sqrt{|\vec{A}(t)|^2-(A_T(t))^2}$

(چون $\underbrace{\vec{v}(t)}_{\text{سرعت}}=\vec{i}+e^{t}\vec{j}+\vec{k} \longrightarrow \underbrace{\vec{A}(t)}_{\text{شتاب}}=e^{t}\vec{j} \Rightarrow \underbrace{|\vec{A}(t)|}_{\text{اندازه}}=\sqrt{(e^t)^2}=e^t$

$\xRightarrow{\text{در نتیجه}} A_N(t)=\sqrt{(e^t)^2-\left(\frac{e^{2t}}{\sqrt{2+e^{2t}}}\right)^2}=\sqrt{e^{2t}-\frac{e^{4t}}{2+e^{2t}}}\overset{\text{ساده}}{=}\frac{\sqrt{2}\,e^{t}}{\sqrt{2+e^{2t}}}$

مثال - فرض کنیم $\vec{R}(t)=t^2\vec{i}+t\vec{j}+t^2\vec{k}$، مؤلفه های مماسی و قائم شتاب را تعیین کنید.

حل) $\vec{v}(t)=\vec{R}'(t)=2t\vec{i}+\vec{j}+2t\vec{k} \to |\vec{v}(t)|=\sqrt{4t^2+1+4t^2}=\sqrt{1+8t^2}$

مؤلفه مماسی شتاب $A_T(t)=\frac{d}{dt}|v(t)|=\frac{d}{dt}\sqrt{1+8t^2}=\frac{8t}{\sqrt{1+8t^2}}$

$\vec{A}(t)=\vec{v}'(t)=2\vec{i}+2\vec{k} \to |\vec{A}(t)|^2=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow A_N(t)\underset{\text{فرمول}}{=}\sqrt{|\vec{A}(t)|^2-(A_T(t))^2}=\sqrt{8-\frac{64t^2}{1+8t^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+8t^2}}$

تمرین - فرض کنید $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + e^{t}\,\vec{j}$ بردار مکانی یک جسم متحرک باشد. مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب را تعیین کنید. (جواب: $A_T = \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}}$ و $A_N = \frac{e^{t}}{\sqrt{1+e^{2t}}}$)

تمرین - تابع برداری زیر مفروض است. مطلوبست محاسبه‌ی A_T و A_N در لحظه‌ی $t=0$.

$$\vec{R}(t) = (2+3t+3t^2)\,\vec{i} + (3t+4t^2)\,\vec{j} - 6\cos t\,\vec{K}$$

(جواب: $A_N = 6$ و $A_T = 10$)

رویه های درجه ی دوم

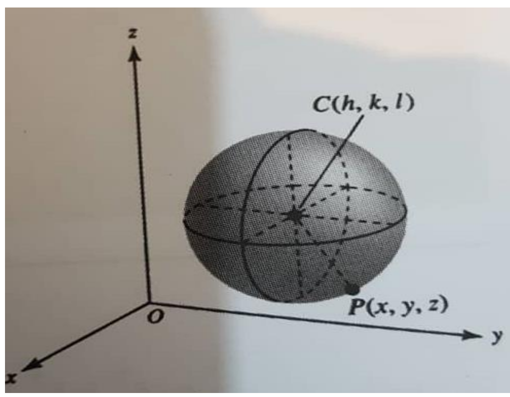
رویه عبارتست از نمودار معادله ای در R^3 .

نمودار معادله‌ای در R^3 مجموعه ی همه ی نقاطی مانند (x,y,z) است که مختصاتشان در معادله صدق می کنند .

۱- کره : مجموعه ی همه ی نقاطی در فضای سه بعدی است که از نقطه ی ثابت به یک فاصله اند. نقطه ی ثابت را مرکز کره و اندازه ی ثابت را شعاع کره می نامند.

معادله ی کره ای به شعاع r و مرکز (h,k,l) به صورت زیر است :

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$$



مثال ۲. نمودار معادلهٔ زیر را معین کنید

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z=2$$

حل. با دسته‌بندی جمله‌ها و تکمیل مربعها داریم

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4+z^2+2z+1=2+9+4+1$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$$

نمودار این معادله کره‌ای به مرکز $(3, 2, -1)$ و شعاع ۴ است.

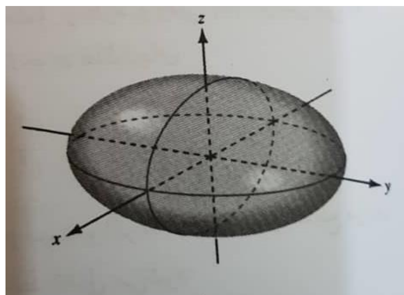
شکل ۱۳ کرهٔ مثال ۲ را نشان می‌دهد.

شکل ۱۳

۲- بیضی وار

(بیضی گون - بیضوی): اگر معادله ی رویه به صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ باشد رویه ی مورد نظر بیضی وار نامیده می شود.

مرکز این بیضی وار مبدأ مختصات است و تقاطع آن با محور x ها نقاط $x=\pm a$ و با محور y ها $y=\pm b$ و با محور z ها نیز نقاط $z=\pm c$ است.

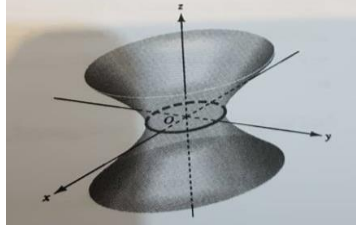


بیضیوار

۳- هذلولی وار (هذلولی گون)

الف) هذلولی وار یکپارچه: معادله ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ مربوط به هذلولی وار یکپارچه است که محور آن محور z ها است.

تذکر محور هذلولی وار یکپارچه در جهت متغیری است که علامت منفی دارد.

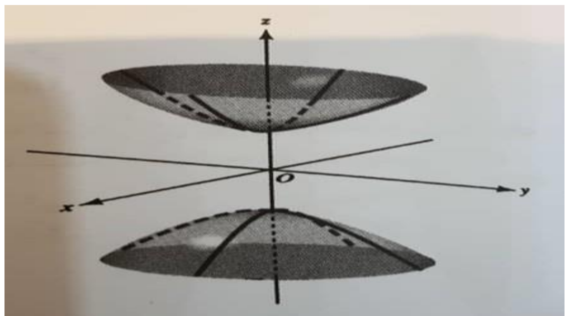


هذلولیوار بیضوی یکپارچه

شکل ۱۶

ب) هذلولی‌وار دوپارچه: معادله‌ی $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ معادله‌ی هذلولی‌وار دوپارچه‌ای است که محور آن محور z هاست.

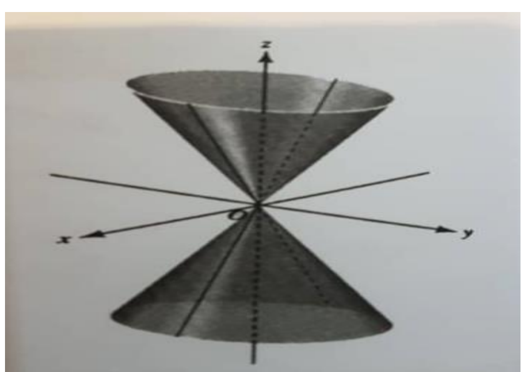
تذکر محور هذلولی‌وار دوپارچه در جهت متغیری است که علامت آن مثبت است.



هذلولیوار بیضوی دوپارچه

۴ـ مخروط بیضوی: معادله‌ی مخروط بیضوی که محور آن محور z هاست به‌صورت زیر است:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

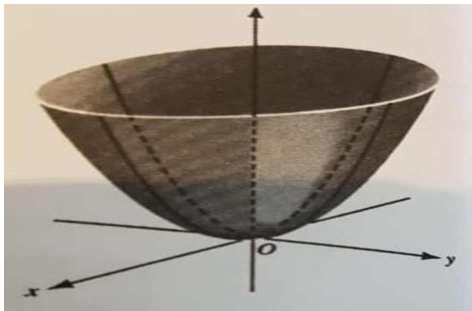


مخروط بیضوی

۵- سهمی وار (سهموی - سهمی گون)

الف) سهمیوار بیضوی: معادله‌ی $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ مربوط به سهمی وار بیضوی است که رأس آن در مبدأ مختصات قرار دارد و در جهت محور z ها است.

* توجه * (جهت سهمی وار بیضوی در جهت متغیری است که توان آن یک است).

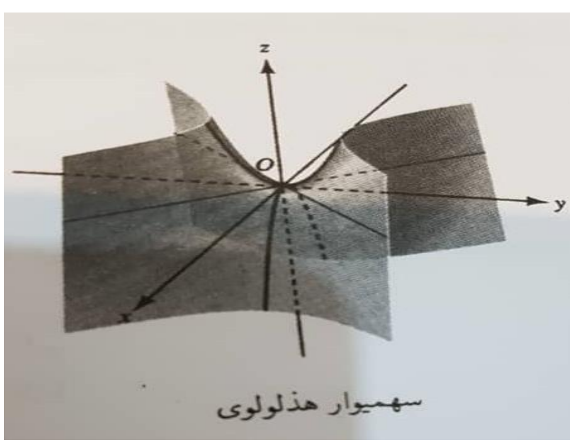


سهمیوار بیضوی

شکل ۲۰

ب) سهمی وار هذلولوی (زین اسب): معادله به صورت $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$

معادله‌ی سهمی وار هذلولوی (زین اسب) است.



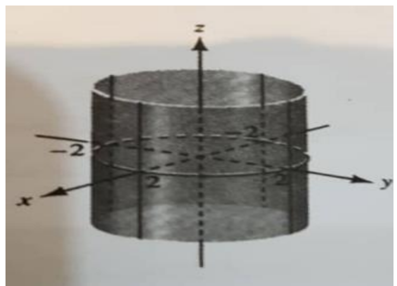
سهمیوار هذلولوی

۶- استوانه

رویه ای است که یکی از سه متغیر x، y یا z را نداشته و حداقل یکی از متغیرها، درجه اش دو باشد. جهت استوانه در جهت متغیری است که در معادله نیست.

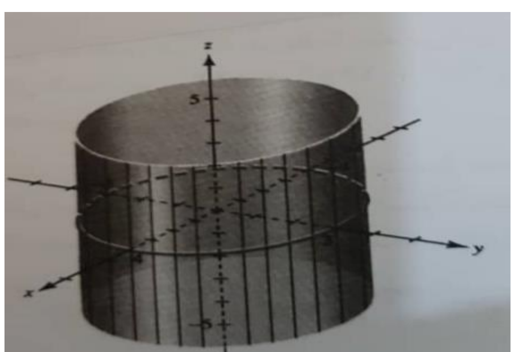
۱- (استوانه‌ی مستدیر)

مثال: معادله‌ی $x^2+y^2=a^2$ استوانه ای است که مقطع آن دایره است و چون در معادله، z وجود ندارد، لذا استوانه در جهت محور z ها است.



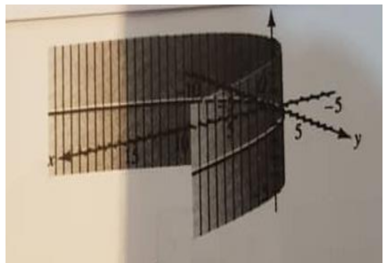
استوانه: $x^2 + y^2 = 4$

۲- استوانه‌ی بیضوی: مانند $9x^2+16y^2=144$ که هادی آن بیضی $9x^2+16y^2=144$ در صفحه‌ی xy است.



استوانه: $9x^2 + 16y^2 = 144$

۳ــ استوانه‌ی سهموی: مانند $y^2=8x$ که هادیِ آن سهمی $y^2=8x$ در صفحه‌ی xy است



استوانه: $y^2 = 8x$

۴ــ استوانه‌ی هذلولوی: مانند $25x^2-4y^2=100$ که هادیِ آن هذلولیِ $25x^2-4y^2=100$ در صفحه‌ی xy است.

استوانه: $25x^2 - 4y^2 = 100$